Dit dictaat wordt gebruikt voor het voorkandidaats college logika naast het boek "Formele Logika" van van Dalen.

LOGICA

§0. Bij wiskundige (en ook andere) redeneringen, passen we voortdurend (bewust of onbewust) logische wetten toe. Laten we slechts één voorbeeld geven: We weten dat uit A volgt B. We hebben net bewezen dat B niet geldt. Conclusie: A geldt niet. Dit soort logische redeneringen, die we dagelijks als wiskundige gebruiken, zullen we nader onder de loupe nemen. We zullen ze axiomatiseren, dwz. een aantal basis uitspraken aangeven waaruit de andere door middel van afleidingsregels volgen.
Dit axiomatiseren dient niet om zekerder te zijn van onze redenaties en zeker niet om iemands wiskundige vaardigheid te vergroten. Bij het beoefenen van de wiskunde passen we de logische wetten vanzelf wel goed toe. Wanneer iemand hier geen gevoel voor heeft dan zal hij dat ook niet krijgen door het bestuderen van formele logica.
We zullen nu een aantal redenen aangeven, waarom de logica wél belangrijk is.

1. <u>Wiskundige interesse</u>.

Het is een leuke opgave om allereerst de logische wetten te formuleren in een bepaalde taal en deze wetten dan af te leiden uit een aantal (door ons te kiezen) axiomas m.b.v. (door ons te kiezen) afleidingsregels. Wiskundig is daarbij interessant om ons af te vragen of we voldoende axiomas en regels hebben, dwz. of we alle wetten, die we intuitief als waar aanvaarden, ook bewijzen kunnen in ons systeem. Dit probleem zullen we geheel oplossen (volledigheidsstelling van Gödel, 1930).

2. <u>Formalisatie</u>.

Na axiomatisering van de logica is het in principe mogelijk een wiskundige theorie geheel mechanisch te ontwikkelen zonder dat men een beroep op de intuitie behoeft te doen. Het geven van bewijzen is een formeel spel met symbolen geworden.

2.0. Hilberts programma

Hilbert wilde door deze formele bewijzen te onderzoeken aantonen dat delen van de wiskunde vrij van contradicties zijn. Gödel heeft aangetoond, dat de consistentie van een theorie alleen bewezen kan worden m.b.v. een sterkere theorie.

2.1. Onafhankelijkheid

Het belang van de formalisatie is dat het mogelijk is te bewijzen dat in vrijwel alle wiskundige theoriën essentieel onafhankelijke uitspraken *) voorkomen (onvolledigheidsstelling, Gödel 1931). Deze onafhankelijkheids resultaten zijn alleen aan te tonen wanneer we een goed overzicht van alle mogelijke bewijzen hebben.

2.2. Onbeslisbaarheid

Bovendien blijken vrijwel alle wiskundige theorieën onbeslisbaar te zijn. Dit houdt in de mislukking van Leibniz's ideaal.
Leibniz stelde als wiskundig ideaal:

i) Vindt een taal waarin alle wiskundige problemen geformuleerd kunnen worden.
ii) Vindt een methode (machine) om voor iedere zin uit die taal de juistheid na te gaan.

Het streven i) van Leibniz is vrij goed gerealiseerd: in de taal van de verzamelingsleer kan men een groot deel van de wiskunde formuleren. Het is echter onmogelijk om aan ii) te voldoen (onbeslisbaarheidsstelling van Church, 1936). Ook hiervoor is een precieze formalisatie van de wiskunde nodig.

----

*) Een uitspraak A heet essentieel onafhankelijk als A noch niet A te bewijzen zijn.

§1. Informele propositie Logica: Van Dalen §2,3.

§2. Taal en theorie.

2.1. Def. Een alfabet Σ is een verzameling symbolen.
Een woord over Σ is een eindig rijtje symbolen van Σ.
Σ^* is de verzameling van woorden over Σ.

Bij een alfabet Σ kan een verzameling $Z \subset \Sigma^*$ gedefinieerd worden van de zogenaamde zinvolle woorden, oftewel uitspraken.

Een taal is een paar $L = \langle \Sigma, Z \rangle$ waar Σ een alfabet is en $Z \subset \Sigma^*$.

2.2. Voorbeeld. $\Sigma = \{a,p\}$. Z wordt als volgt inductief gedefinieerd:

1) $pa \in Z$

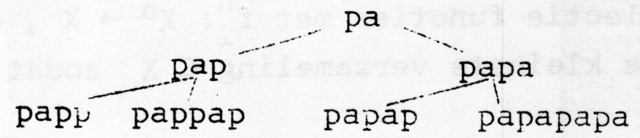
2) a) $\square \in Z \Rightarrow \square\square \in Z$

b) $\square \in Z \Rightarrow \square p \in Z$

3) Z is de kleinste verzameling die aan 1 en 2 voldoet.

(Meestal schrijven we alleen clausules 1) en 2) en veronderstellen daarbij impliciet clausule 3)).

Zinnen van deze taal:



2.3. Def. Een taal gedefinieerd als in 2.2 heet een (formele) taal (kunsttaal).
De regels 2a) en 2b) heten de generatieve grammatika.
Het woord in clausule 1) (meestal zijn er meer) heet een atoom.

2.4. Def. Een theorie T is een paar $\langle L, S \rangle$ waar $L = \langle \Sigma, Z \rangle$ en $S \subset Z$.
S heet de verzameling van stellingen van T.

2.5. Voorbeeld. Evenals een taal kan een theorie inductief gedefinieerd worden.
Beschouw de taal van 2.2. Definieer S inductief:

1. $pap \in S$

2. $\square \in S \Rightarrow \square\square p \in S$

Wat is de verzameling van de stellingen?

2.6. Def. In een definitie van een theorie als in 2.5 heten de regel(s) 2 de afleidingsregels en de zin(nen) in clausule 1 de axioma's.

2.7. Inductieve definities. Zij gegeven een verzameling X, $x_0, x_1 \in X$ een functie $f: X \to X$ en een functie $g: X \times X \to X$. We definiëren een Y als volgt.

Y is de kleinste verzameling $\subset X$ zodat

1) $x_0 \in Y$, $x_1 \in Y$

2) $x \in Y \Rightarrow f(x) \in Y$,

$x, y \in Y \Rightarrow g(x,y) \in Y$.

Ga na, dat als Y en Y' aan 1) en 2) voldoen, dan ook $Y \cap Y'$. Evenzo voor willekeurige doorsneden.

Dus Y kan als de doorsnede van alle verzamelingen die aan 1) en 2) voldoen (er bestaat er tenminste één, want X voldoet) gedefinieerd worden.

We zeggen dat Y gedefinieerd is met bijv. een inductieve definitie.

2.8. Opm. In het algemeen kunnen de clausules 1) en 2) uitgebreider zijn. De meest algemene vorm van een inductieve definitie die wij zullen gebruiken is de volgende.

Zij X een verzameling met $X_0 \subset X$ en $\{f_1^1, f_2^1, \ldots, f_1^2, f_2^2, \ldots \ldots, f_1^3, \ldots\}$ een collectie functies met $f_i^n: X^n \to X$, dan definiëren we Y als de kleinste verzameling $\subset X$ zodat

1) $X_0 \subset Y$

2) $y_1, \ldots, y_n \in Y \Rightarrow f_i^n(y_1, \ldots, y_n) \in Y$ (voor alle i en n)

De volgende beschouwingen houden we voor het eenvoudige voorbeeld in 2.7 van een inductieve definitie, ze gelden ook voor het meest algemene geval.

2.9. Bewijs m.b.v. inductie over een inductief gedefinieerde verzameling.

Zij $Y \subset X$ inductief gedefinieerd en $\phi(y)$ een eigenschap. We geven een methode aan om te bewijzen $\forall y \in Y \phi(y)$.

<u>Stelling</u>. Zij $Y \subset X$ inductief gedefinieerd als in 2.7 en ϕ een eigenschap met

i) $\phi(x_0)$, $\phi(x_1)$

ii) $\phi(x) \Rightarrow \phi(f(x))$

$\phi(x), \phi(y) \Rightarrow \phi(g(x,y))$.

Dan $\forall y \in Y \quad \phi(y)$.

<u>Bewijs</u>.

Definieer $A = \{y \in Y \mid \phi(y)\}$.

Dan 1) $x_0, x_1 \in A$

2) $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$

$x, y \in A \Rightarrow g(x,y) \in A$.

Aangezien Y de doorsnede is van dergelijke A die aan 1) en 2) voldoen geldt $Y \subset A$.

Dus $\forall y \in Y \ \phi(y)$. ⊠

§3. Formele propositie logica: taal en theorie.
Deductietheorema.
Van Dalen §§ 4 t/m 7.

§4. Semantiek van de propositie logica. Volledigheid.
Van Dalen §§8 t/m 11.

§5. De consistentie stelling.

5.1. Def.

1. Een verzameling formules Δ heet <u>maximaal</u> <u>consistent</u> als
i) Δ is consistent
ii) $\Delta \subsetneq \Delta' \Rightarrow \Delta'$ is inconsistent

2. Δ is een <u>maximaal</u> <u>consistente</u> <u>uitbreiding</u> van Γ als
i) Δ is maximaal consistent
ii) $\Gamma \subset \Delta$.

5.2. Lemma. Zij Δ maximaal consistent.
Dan
i) $\Delta \vdash A \Rightarrow A \in \Delta$
ii) $\neg A \in \Delta \Leftrightarrow A \notin \Delta$
iii) $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ of $B \in \Delta$
(Vergelijk ultra filters).

<u>Bewijs</u>:
i) Stel $\Delta \vdash A$. Wegens de consistentie van Δ is dan $\Delta \cup \{A\}$ consistent. (Ga na met het deductie theorema).
Dus vanwege de maximaliteit van Δ, $A \in \Delta$.
ii) $\Rightarrow$: $\neg A \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$, omdat Δ consistent is.
$\Leftarrow$: Stel $A \notin \Delta$. Wegens de maximaliteit van Δ is dan $\Delta \cup \{A\}$ inconsistent
Dus $\Delta \vdash \neg A$ en met i) volgt $\neg A \in \Delta$.
iii) $\Rightarrow$: Zij $A \vee B \in \Delta$ en stel $A \notin \Delta$ en $B \notin \Delta$.
Dan $\neg A \in \Delta$ en $\neg B \in \Delta$ wegens ii).

$A \vee B$	hyp	
$\neg A$	hyp	
$B \vee \neg A$	I	
$\neg A \vee B$	comm.	
$B \vee B$	IV	
B	II	

Dit laat zien dat $\Delta \vdash B$. Maar ook $\Delta \vdash \neg B$, in strijd met de consistentie van Δ.

$\Leftarrow$: Stel $A \in \Delta$ of $B \in \Delta$. Zeg $B \in \Delta$.
Dan is $\dfrac{B}{A \vee B}$ een bewijs van $\Delta \vdash A \vee B$, dus met i) $A \vee B \in \Delta$. ⊠

5.3. Lemma. Als $\Gamma \vdash A$, dan voor zekere eindige $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ $\Gamma_0 \vdash A$.

<u>Bewijs</u>

Zij $P_0,\ldots,P_n$ een bewijs van $\Gamma \vdash A$. Dan voldoet $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{P_0,\ldots,P_n\}$. ⊠

5.4. Lemma. Zij $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ een rij met Γ_i consistent voor alle $i \in \mathbb{N}$. Dan is $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ consistent. ⊠

<u>Bewijs</u>

Stel $\cup \Gamma_i \vdash 0$. Dan $\{A_1,\ldots,A_n\} \vdash 0$ waar $\{A_1,\ldots,A_n\}$ een eindig deel is van $\cup \Gamma_i$. Zij $A_j \in \Gamma_{i_j}$ en Γ_{i_0} de grootste van de Γ_{i_j} ($i_0 = \max(i\ ,\ldots,i_n)$). Dan $\{A_1,\ldots,A_n\} \subseteq \Gamma_{i_0}$, dus $\Gamma_{i_0} \vdash 0$ in tegenspraak met Γ_{i_0} consistent. ⊠

5.5. Stelling. Zij Γ consistent, dan heeft Γ een maximaal consistente uitbreiding Δ.

<u>Bewijs</u>

Er zijn aftelbaar veel atomen in de propositie logica, dus de verzameling formules is aftelbaar.
Zij $A_0, A_1, A_2, \ldots$ een aftelling van alle formules.
Definieer $\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_n\} & \text{als dit consistent is.} \\ \Delta_n & \text{anders} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$$

Met inductie volgt eenvoudig dat Δ_n consistent is voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus (5.4) Δ is consistent.

Het is duidelijk dat $\Gamma \subset \Delta$ en we hoeven dus alleen nog aan te tonen dat Δ maximaal consistent is.

Zij $\Delta' \supsetneq \Delta$. Neem een $A \in \Delta'-\Delta$, en stel $A=A_n$. Uit $A_n \notin \Delta$ volgt dat $A_n \notin \Delta_{n+1}$, dus $\Delta_{n+1}=\Delta_n$ en $\Delta_n \cup \{A_n\}$ is inconsistent.

Dus $\Delta' \supseteq \Delta_n \cup \{A_n\}$ is inconsistent. ⊠

5.6. Stelling. Als Γ consistent is, dan $w \models \Gamma$ voor zekere w.

Bewijs.

Zij Δ een maximaal consistente uitbreiding van Γ.

Definieer $w(i)=1$ als $p_i \in \Delta$

$\qquad\qquad 0$ als $p_i \notin \Delta$

Bewering $w \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$.

Inductie naar de definitie van A

1) A is atoom p_i.

$w \models A \Leftrightarrow w(p_i)=1 \Leftrightarrow p_i \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$

2) a) A is $\neg B$

$w \models A \Leftrightarrow w \not\models B \underset{i.h.}{\Leftrightarrow} B \notin \Delta \underset{5.2.}{\Leftrightarrow} \neg B \in \Delta$

b) A is $B \vee C$

$w \models A \Leftrightarrow w \models B$ of $w \models C \Leftrightarrow B \in \Delta$ of $C \in \Delta \underset{5.2.}{\Leftrightarrow} B \vee C \in \Delta$.

Dus $w \models \Gamma$, daar $\Gamma \subset \Delta$. ⊠

§ 6. Algebraische structuren en hun talen: Waarheid.

6.1 Def. Zij X een verzameling.
R is een <u>relatie met n argumenten op X</u> als $R \subset X^n$
f is een <u>functie met n argumenten op X</u> als $f:X^n \to X$
e is een <u>constante op X</u> als $e \in X$.

6.2 Def. Een <u>(algebraische) structuur</u> $\mathfrak{A}$ is een niet lege verzameling X met daarop een aantal relaties, functies en constanten gedefinieerd: $\mathfrak{A} = (X,R_0,R_1,\ldots,f_0,f_1,\ldots,e_0,e_1,\ldots)$.
Afkortend zeggen we: een structuur $\mathfrak{A}$ is een viertal $\mathfrak{A} = (X,\vec{R},\vec{f},\vec{e})$ met $X \neq \emptyset$ en R,f,e zijn resp. een aantal relaties, functies en constanten op X.

6.3 Opm. 1. Vaak schrijven we $R_0^{n_0},R_1^{n_1},\ldots,f_0^{m_0},f_1^{m_1},\ldots$ om aan te duiden dat n_i resp. m_i het aantal argumenten is van R_i resp. f_i...
2. Meestal nemen we in een structuur de gelijkheids relatie $=^2$ op.
3. X heet het <u>universum</u> van $\mathfrak{A}$ en we schrijven hiervoor wel $X_{\mathfrak{A}}$.

6.4 Vb. Een groep is een structuur $G = (X,=^2,\cdot^2,e)$ zodat in X geldt
$x.(y.z) = (x.y).z$
$\forall x \exists y \quad x.y=e$
$x.e = e.x = x$
Schrijf zelf op waaraan een structuur $\mathcal{R} = (X,=^2,+^2,\cdot^2,0,1)$ moet voldoen om een lichaam te zijn.

In voorbeeld 6.4 zien we hoe we door uitspraken van een bepaalde vorm kunnen aangeven wanneer G een groep is. Deze uitspraken zitten in de taal behorend bij G.
Laat R de verzameling der reële getallen zijn en Q die der rationele getallen.
Of we nu de structuur (R,=,+) of (Q,=,·) willen beschrijven, de taal zal niet wezenlijk verschillen want behalve de gelijkheid hebben we in beide gevallen één functie met 2 argumenten. Wel gelden er in de ene structuur andere eigenschappen dan in de andere.

6.5 Zij $\mathfrak{A} = (X, R_0^{n_0}, \dots, f_0^{m_0}, \dots, e_0, \dots, e_p)$ een structuur.
Het type van $\mathfrak{A}$ is $(n_0, \dots, m_0, \dots, p)$.

Voor de beschrijving van een structuur is alleen het type van belang.

6.6. Vb. 1. $(R,+,0)$ en $(Q,\cdot,1)$ hebben hetzelfde type, maar $(R,+,\cdot)$ en $(R,+)$ niet.

2. $G = (X, =, +^2, -^1, 0)$ is een groep als in X

$$x+(y+z) = (x+y)+z$$
$$x+(-x) = 0$$
$$x+0 = 0+x = x$$

Vergelijk 6.4 en 6.6.2. We zien dat we een groep eenvoudiger kunnen beschrijven door een ander type te gebruiken.

6.7 Def. Zij $\tau = (n_0, \dots, m_0, \dots, p)$ een bepaald type.
We definieren nu de volgende taal $\mathcal{L}^\tau$.

Alfabet:

$x_0, x_1, \dots$	variabelen
$P_0^{n_0}, \dots$	predicaat symbolen
$F_0^{m_0}, \dots$	functie symbolen
$c_0, \dots, c_p$	constante symbolen
$\vee, \neg, \exists$	voegtekens
(,), ,	hulpsymbolen.

Om de formules te definieren, moeten we eerst inductief invoeren:

Termen 1) Iedere variabele x of constante c is een term
2) Als $t_1, \dots, t_k$ termen zijn, en F^k is een functie symbool, dan is $F^k(t_1, \dots, t_k)$ een term.

Formules 1) Als $t_1, \dots, t_k$ termen zijn en R^k is een predicaat symbool, dan is $R^k(t_1, \dots, t_k)$ een formule (atoom)
2) Als A en B formules zijn, dan ook $(A \vee B)$, $\neg A$ en $\exists xA$ (x is een variabele).

Afkortingen $A \rightarrow B$ is $(\neg A) \vee B$, $A \wedge B$ is $\neg(\neg A \vee \neg B)$,
$A \leftrightarrow B$ is $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, $\forall xA$ is $\neg \exists x \neg A$.

6.8 Opm. 1. Indien geen verwarring mogelijk is laten we de bovenindices bij de relaties, functies, predicaat symbolen en functie symbolen weg.

2. Zij $\mathfrak{A} = (X, \vec{R}, \vec{f}, \vec{e})$ een structuur met type τ dan heet $\mathcal{L}^\tau$ de bijbehorende taal.
$P_0, \dots, F_0, \dots, c_0, \dots$ heten de specifieke symbolen van $\mathcal{L}^\tau$ en dienen om $R_0, \dots, f_0, \dots, e_0, \dots$ te beschrijven.

3. Bij een concrete structuur zoals bijv. $\mathbb{R} = (R,=,+,\cdot,0,1)$ geven we de specifieke symbolen vaak aan met $\dot{=},\dot{+},\dot{\cdot},\dot{0},\dot{1}$.

<u>Verdere afkortingen</u>:

$\dot{=}(t_1,t_2)$	is	$t_1 \dot{=} t_2$
$\dot{+}(t_1,t_2)$	is	$t_1 \dot{+} t_2$
$\dot{\cdot}(t_1,t_2)$	is	$t_1 \dot{\cdot} t_2$
$t_1 \dot{\cdot} t_2$	is	t_1^2
$\dot{1} \dot{+} \dot{1}$	is	$\dot{2}$
	enz.	

Beschouw nu de taal behorende bij $\mathbb{R}$ in 6.8.3. Intuitief geldt $\exists x_0 \; x_0^2 \dot{=} \dot{2}$ in $\mathbb{R}$ ($\sqrt{2}$ is een reëel getal), maar niet in $\mathbb{Q}=(Q,=,+,\cdot,0,1)$ ($\sqrt{2}$ is niet rationaal).

We geven dit aan als volgt:

$\mathbb{R} \models \exists x_0 \; x_0^2 \dot{=} \dot{2}$ en $\mathbb{Q} \not\models \exists x_0 \; x_0^2 \dot{=} \dot{2}$ (lees: $\exists x_0 \; x_0^2 \dot{=} \dot{2}$ is waar in $\mathbb{R}$ en onwaar in $\mathbb{Q}$).

Zij τ een type, $\mathfrak{A}$ een structuur met type τ en A een formule van $\mathcal{L}^\tau$. We willen nu aangeven wanneer A waar is in $\mathfrak{A}$. Om dit te doen moeten we eerst de termen van $\mathcal{L}^\tau$ interpreteren in het universum van $\mathfrak{A}$. Variabelen kunnen we naar believen interpreteren m.b.v. bedelingen.

6.9 Def. Zij $\mathfrak{A}$ een structuur. Een <u>bedeling in $\mathfrak{A}$</u> is een afbeelding $S:\mathbb{N} \to X$ waar X het universum van $\mathfrak{A}$ is.

6.10 Def. Zij $\mathfrak{A}$ een structuur en s een bedeling in $\mathfrak{A}$. Zij $\mathcal{L}$ de taal bij $\mathfrak{A}$. We definieren inductief $\langle t|\mathfrak{A},s\rangle$ voor termen $t \in \mathcal{L}$: <u>de waarde van t in $\mathfrak{A}$ onder de bedeling s</u>.

$\langle x_i|\mathfrak{A},s\rangle = s(i)$

$\langle c_i|\mathfrak{A},s\rangle = e_i$

$\langle F_i(t_1,\ldots)|\mathfrak{A},s\rangle = G_i(\langle t_1|\mathfrak{A},s\rangle,\ldots)$

6.11 Zij s een bedeling in $\mathfrak{A}$ en a een element van het unsiversum van . Dan is s(i/a) de bedeling s' gedefinieerd door

$s'(n) = s(n)$ als $n \neq i$

$s'(i) = a$

Nu kunnen we definieren $\mathfrak{A},s \models A$ (A is <u>waar in $\mathfrak{A}$ onder s</u>) voor formules A van $\mathcal{L}$. ($\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}$ van type τ).

6.12 Def. $\mathfrak{A},s \models P_i(t_1,\ldots) \iff R_i(\langle t_1|\mathfrak{A},s\rangle,\ldots)$

$\mathfrak{A},s \models \neg A \iff \mathfrak{A},s \not\models A$

$\mathfrak{A},s \models A \vee B \iff \mathfrak{A},s \models A$ of $\mathfrak{A},s \models B$

$\mathfrak{A},s \models \exists x_i A \iff$ voor zekere $a \in X_a$

$\mathfrak{A},s(i/a) \models A$.

6.13 Stelling

$\mathfrak{A},s \models A \wedge B \iff \mathfrak{A},s \models A$ en $\mathfrak{A},s \models B$

$\mathfrak{A},s \models A \to B \iff (\mathfrak{A},s \models A \Rightarrow \mathfrak{A},s \models B)$

$\mathfrak{A},s \models \forall x_i A \iff$ voor alle $a \in X$ $\mathfrak{A},s(i/a) \models A$

6.14 Definitie

1. $\mathfrak{A} \models A$ als voor alle s $\mathfrak{A},s \models A$
2. $\models A$ als voor alle $\mathfrak{A}$ (van type τ) $\mathfrak{A} \models A$. (A heet <u>waar</u> in dit geval)
3. $\mathfrak{A} \models \Gamma$ als voor alle $A \in \Gamma$ $\mathfrak{A} \models A$
4. $\Gamma \models A$ als voor alle $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models A$.

Er geldt $\models A \iff \emptyset \models A$, ga na.

§8. De axioma's en regels van de predicaten logica.

Van Dalen §16 en 20.

Voor een preciese formulering definieren we inductief de begrippen vrije variabele, substitutie en substitueerbaar in.

8.1 Def. Inductief definieren we FV(t), de verzameling (vrije) variabelen van een term t:

$FV(x_i) = \{x_i\}$

$FV(c_i) = \emptyset$

$FV(F(t_1,\ldots,t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$

8.2 Def. Evenzo definieren we FV(A), de verzameling vrije variabelen van een formule A:

$FV(P(t_1,\ldots,t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$

$FV(A \vee B) = FV(A) \cup FV(B)$

$FV(\neg A) = FV(A)$

$FV(\exists x_i A) = FV(A) - \{x_i\}$. A heet een <u>zin</u> als $FV(A) = \emptyset$.

8.3 Def. Inductief definieren we $S^t_{x_i}(u)$, het resultaat van de substitutie van t in x_i in de term **u**:

$S^t_{x_i}(x_i) = t$

$S^t_{x_i}(x_j) = x_j$ als $i \neq j$

$S^t_{x_i}(c_i) = c_i$

$S^t_{x_i}(F(t_1,\ldots,t_n)) = F(S^t_{x_i}(t_1),\ldots,S^t_{x_i}(t_n))$.

8.4 Def. Evenzo definieren we $S^t_{x_i}(A)$, het resultaat van de substitutie van t in <u>de vrije plaatsen van</u> x_i in de formule A.

$S^t_{x_i}\ P(t_1,\ldots,t_n) = P(S^t_{x_i}(t_1),\ldots,S^t_{x_i}(t_n))$

$S^t_{x_i}(B \vee C) = S^t_{x_i}(B) \vee S^t_{x_i}(C)$

$S^t_{x_i}(\neg B) = \neg S^t_{x_i}(B)$

$S^t_{x_i}(\exists x_i B) = \exists x_i B$

$S^t_{x_i}(\exists x_j B) = \exists x_j\ S^t_{x_i}\ B$ als $i \neq j$.

(We substitueren alleen in de vrije plaatsen;
een substitutie als $S^3_x(\exists x\ x+x=4) = \exists 3\ \ 3+3 = 4$ is niet zinvol).

8.5 Def. t is substitueerbaar voor x_i in A (afkorting: $t\text{-}x_i\text{-}A$) wordt als volgt met inductie naar de definitie van A gedefinieerd:

$t\text{-}x_i\text{-}P(t_1,\dots,t_n) \Leftrightarrow 0 = 0$
$t\text{-}x_i\text{-}B \vee C \Leftrightarrow t\text{-}x_i\text{-}B$ en $t\text{-}x_i\text{-}C$
$t\text{-}x_i\text{-}\neg B \Leftrightarrow t\text{-}x_i\text{-}B$
$t\text{-}x_i\text{-}\exists x_i B \Leftrightarrow 0 = 0$
$t\text{-}x_i\text{-}\exists x_j B \Leftrightarrow (x_j \notin FV(t)$ of $x_i \notin FV(B))$ en $t\text{-}x_i\text{-}B$.

8.6 Het nieuwe axioma schema van de predicatenlogica is nu
Als t-x-A, dan is $S^t_x(A) \rightarrow \exists x\ A$ een axioma.
De nieuwe regel is: als $x \notin FV(B)$, dan $\dfrac{A \rightarrow B}{\exists x\ A \rightarrow B}$

§9. Deductie theorema; volledigheid.

9.1 Deductie theorema.

Als A een zin is, dan $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$

9.2 Opgave.

1. Bewijs de omgekeerde implicatie in 8.7.
2. Laat zien dat de conditie A is een zin noodzakelijk is.

9.3 Lemma

1. $\models \neg A \vee A$
2. $\models S^{t}_{x_i} A \to \exists x_i A$ als t-x_i-A.

Voor 2 hebben we de volgende hulplemma's nodig:

i) $\langle S^{t}_{x_i} u | \mathfrak{A}, s \rangle = \langle u | \mathfrak{A}, s(i/\langle t | \mathfrak{A}, s\rangle) \rangle$

ii) $\mathfrak{A}, s \models S^{t}_{x_i} A \iff \mathfrak{A}, s(i/\langle t | \mathfrak{A}, s\rangle) \models A.$

als t-x_i-A.

9.4 Lemma

1. $\mathfrak{A} \models A \Rightarrow \mathfrak{A} \models B \vee A$
2. $\mathfrak{A} \models A \vee A \Rightarrow \mathfrak{A} \models (A \vee B) \vee C$
3. $\mathfrak{A} \models A \vee (B \vee C) \Rightarrow \mathfrak{A} \models (A \vee B) \vee C$
4. $\mathfrak{A} \models A \vee B,\ \mathfrak{A} \models \neg A \vee C \Rightarrow \mathfrak{A} \models B \vee C$
5. $\mathfrak{A} \models A \to B \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x A \to B$ als $x \notin FV(B)$.

9.5 Stelling.

$\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A.$

9.6 Def. Als $\mathfrak{A} \models \Gamma$, dan **heet** $\mathfrak{A}$ een <u>model</u> van Γ.

9.7 Consistentie stelling (Henkin 1947).

Als Γ consistent is, dan heeft Γ een model (wordt in het facultatieve uur bewezen).

9.8 Volledigheids stelling (Gödel 1930)

$\Gamma \vdash A \iff \Gamma \models A.$

Bewijs analoog aan de consistentie stelling voor de propositie logica.

9.9. <u>Lemma</u>. 1. Als $x_i \in FV(t) \Rightarrow s(i) = s'(i)$,
dan $\langle t|\mathfrak{A},s\rangle = \langle t|\mathfrak{A},s'\rangle$

2. Als $x_i \in FV(A) \Rightarrow s(i) = s'(i)$,
dan $\mathfrak{A},s \models A \iff \mathfrak{A},s' \models A$.

Bewijs.

1. Inductie naar de definitie van t.

Geval 1. $t = x_j$ Dan $\langle t|\mathfrak{A},s\rangle = s(j) = s'(j)$
$= \langle t|\mathfrak{A},s'\rangle$
wegens het gegeven.

Geval 2. $t = c_j$. Dan $\langle t|\mathfrak{A},s\rangle = e_j = \langle t|\mathfrak{A},s'\rangle$.

Geval 3. $t = F_j(t_1,\ldots)$

Inductie hypothese
$\langle t_1|\mathfrak{A},s\rangle = \langle t_1|\mathfrak{A},s'\rangle ,\ldots$

Te bew. $\langle t|\mathfrak{A},s\rangle = \langle t|\mathfrak{A},s'\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle t|\mathfrak{A},s\rangle &= f_j(\langle t_1|\mathfrak{A},s\rangle ,\ldots) = \\ &= f_j(\langle t_1|\mathfrak{A},s'\rangle ,\ldots) = \\ &= \langle F_j(t_1,\ldots)|\mathfrak{A},s\rangle = \\ &= \langle t|\mathfrak{A},s\rangle,\end{aligned}$$

wegens de inductie hypothese.

2. Inductie naar de definitie van A.

Geval 1,2,3 $A = P_j(t_1,\ldots)$

$A = B \vee C$

$A = \neg B$

doe zelf.

Geval 4. $A = \exists x_j\, B$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A},s \models A &\iff \mathfrak{A},s \models \exists x_j\, B \\ &\iff \text{er is een } a \in X_{\mathfrak{A}} \text{ met } \mathfrak{A},s(j/a) \models B \\ &\iff \text{er is een } a \in X_{\mathfrak{A}} \text{ met } \mathfrak{A},s'(j/a) \models B \\ &\iff \mathfrak{A},s' \models \exists x_j\, B\end{aligned}$$

In de voorlaatste stap is de inductie hypothese gebruikt.

9.10. <u>Corollarium.</u> 1. Als $x_i \notin FV(t)$, dan

$$\langle t|\mathfrak{A},s\rangle = \langle t|\mathfrak{A},s(i/a)\rangle$$

2. Als $x_i \notin FV(A)$, dan

$$\mathfrak{A},s \models A \iff \mathfrak{A},s(i/a) \models A.$$

9.11. <u>Bewijs van de hulplemma's in 9.3.</u>

Lemma. Zij $\mathfrak{A}$ een structuur en s een bedeling in $\mathfrak{A}$.

1. $\langle S^t_{x_i} u|\mathfrak{A},s\rangle = \langle u|\mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s\rangle)\rangle$

2. $\mathfrak{A},s \models S^t_{x_i} A \iff \mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s\rangle) \models A$ als $t\text{-}x_i\text{-}A$

Bewijs.

1. Inductie naar de definitie van u.

Geval 1. $u = x_i$. Dan $\langle S^t_{x_i} u|\mathfrak{A},s\rangle = \langle t|\mathfrak{A},s\rangle$

en $\langle u|\mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s\rangle)\rangle =$

$= \langle x_i|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle = \langle t|\mathfrak{A},s\rangle$

Geval 2. $u = x_j$, $i \neq j$.

Dan $\langle S^t_{x_i} u|\mathfrak{A},s\rangle = \langle x_j|\mathfrak{A},s\rangle = s(j)$

en $\langle u|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle =$

$= \langle x_j|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle = s(j)$

Geval 3. $u = c_i$. Dan $\langle S^t_{x_i} u|\mathfrak{A},s\rangle = \langle c_i|\mathfrak{A},s\rangle = e_i$

en $\langle u|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle =$

$= \langle c_i|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle = e_i$

Geval 4. $u = F_j(t_1,\ldots)$.

Dan $\langle S^t_{x_i} u|\mathfrak{A},s\rangle =$

$= \langle F(S^t_{x_i} t_1,\ldots)|\mathfrak{A},s\rangle =$

$= f_j(\langle S^t_{x_i} t_1|\mathfrak{A},s\rangle, \ldots)$

Volgens de inductie hypothese geldt het lemma voor $t_1,\ldots$. Dus dit is gelijk aan

$= f_j(\langle t_1|\mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s\rangle)\rangle,\ldots) =$

$= \langle F_j(t_1,\ldots)|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle =$

$= \langle u|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle$

2. Inductie naar de definitie van A.

Geval 1. $A = P_j(t_1,\ldots)$.

$$\mathfrak{A},s \models S^t_{x_i} A \iff \mathfrak{A},s \models P_j(S^t_{x_i} t_1,\ldots)$$
$$\iff R_j(\langle S^t_{x_i} t_1|\mathfrak{A},s\rangle,\ldots)$$
$$\iff R_j(\langle t_1|\mathfrak{A},s(i/\ldots)\rangle,\ldots)$$
(op grond van 1.)
$$\iff \mathfrak{A},s(i/\ldots) \models P_j(t_1,\ldots)$$
$$\iff \mathfrak{A},s(i/\ldots) \models A.$$

Geval 2,3. $A = B \vee C$

$A = \neg B$

doe zelf m.b.v. de inductie hypothese.

Geval 4. $A = \exists x_i\, B$

$$\mathfrak{A},s \models S^t_{x_i} \exists x_i\, B \iff \mathfrak{A},s \models \exists x_i\, B$$
$$\iff \mathfrak{A},s(i/\ldots) \models \exists x_i\, B$$
$$\iff \mathfrak{A},s(i/\ldots) \models A.$$

De voorlaatste stap volgt uit 9.10 daar $x_i \notin FV(\exists x_i\, B)$.

Geval 5. $A = \exists x_j\, B$, $i \neq j$.

$$\mathfrak{A},s \models S^t_{x_i} A \iff \mathfrak{A},s \models \exists x_j\, S^t_{x_i} B$$

$\iff$ er is een $a \in X_{\mathfrak{A}}$ met $\mathfrak{A},s(j/a) \models S^t_{x_i} B$

$\iff$ er is een a met $\mathfrak{A},s(j/a)(i/\langle t|\mathfrak{A},s(j/a)\rangle) \models B$ wegens de inductie hypothese

$\iff$ er is een a met $\mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s(j/a)\rangle)(j/a) \models B$ wegens $i \neq j$

$\iff \mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s(j/a)\rangle) \models \exists x_j\, B$

$\iff \mathfrak{A},s(i/\langle t|\mathfrak{A},s\rangle) \models \exists x_j\, B$

omdat uit t-x_i-A volgt $x_j \notin FV(t)$ en we dus 9.10 kunnen toepassen. ⊠

<u>PRAKTIKUM LOGIKA</u>.

1. Meer bewijzen:

   i) $A \vee (B \vee B) \vdash A \vee B$,

   ii) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$,

   iii) $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$,

   iv) $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

2. Bewijs dat de volgende afgeleide regels geldig zijn:

   i) $\dfrac{A \wedge B}{A}$, ii) $\dfrac{A \wedge B}{B \wedge A}$, iii) $\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{(A \wedge B) \wedge C}$,

   iv) $\dfrac{\Gamma \vdash A;\Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$ waar Γ en Δ verzamelingen proposities zijn.

3. Bereken de waarderingen van de volgende proposities, gegeven de waarderingen van bijbehorende atomen.

   i) $(((p_1 \wedge p_2) \vee p_1) \rightarrow p_1) \wedge (p_3 \rightarrow \neg p_2)$ waar

   $w(p_1) = w(p_2) = 0, w(p_3) = 1$.

   ii) $p_3 \rightarrow ((p_3 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_2))$ waar $w(p_1) = w(p_3) = 1,\ w(p_2) = 0$.

   iii) $(p_1 \rightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2)) \vee p_2$ waar $w(p_1) = w(p_2) = 0$.

   iv) $((p_3 \vee p_2) \vee \neg p_1) \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg(p_3 \wedge p_2))$ waar

   $w(p_1) = w(p_2) = w(p_3) = 1$.

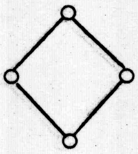
4. Bewijs:

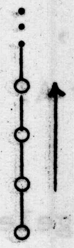
   i) Als $\vdash A$ en $\nvdash \neg A$ dan is er een B zodat $\vdash B \rightarrow A$, en een C zodat $\vdash A \rightarrow C$.

   ii) Als $\nvdash A \rightarrow B$ en $\vdash B \rightarrow A$ dan is er een C zodat $\vdash B \rightarrow C$, $\vdash C \rightarrow A, \nvdash C \rightarrow B$ en $\nvdash A \rightarrow C$.

5. In de volgende grafieken stel de knopen proposities voor. Een propositie A is boven propositie B dan en slechts dan als $\vdash B \rightarrow A$

en $\nvdash A \to B$. Construeer verzamelingen proposities zodat we de volgende grafieken krijgen.

(a) 

(b)  oneindig stijgende rij.

(c) oneindig dalende rij.

(d) oneindig dalende en stijgende rij. (als in $\mathbb{Z}$)

(e) ...o o o o o... oneindige verzameling van onvergelijkbare proposities.

PRAKTIKUM LOGIKA IV 12 februari 1974.

1. a. Vertaal de volgende Nederlandse zinnen in de predikaten-logika.

   i) Het nummer 347 is onnut.

   ii) s is de grootste element van S.

   iii) De elementen van S zijn lineair geordend.

   b. Laat $x|y$ betekenen "x is een deler van y". Vertaal:

   i) De deelbaarheidsrelatie is transitief.

   ii) Er is een getal dat alle getallen deelt.

   iii) y heeft precies een deler.

   iv) y is een priemgetal.

   v) x en y zijn relatief priem.

   c. Vertaal de volgende formules in Nederlandse zinnen.

   i) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$.

   ii) $(\exists y)(\forall x)(x < y \vee x=y)$.

   iii) $(\exists x)(\forall y)((x \in S) \wedge ((y \in S \rightarrow (y \leqslant x)))$.

   iv) $(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x=y)$.

   d. Kun je logisch uitdrukken dat S oneindig is, als je enige relatie de gewone $>$ is ?

2. Welke variabelen zijn in de volgende formules gebonden ?

   i) $(\exists x_0)(R(x_0 x_1) \rightarrow (x_0=x_1))$

   ii) $(\exists x_1)(\exists x_2)(x_1 \neq x_2)$.

   iii) $(\forall x_3)(((\forall x_1)R(x_1,x_2)) \rightarrow R(x_3,a))$.

   iv) $(\forall x_2)R(x_3,x_2) \rightarrow (\forall x_3)R(x_3,x_2)$.

3. Men kan specifieke aantallen van objekten in de predikatenlogika vastleggen. Voorbeelden: "Er zijn (minstens) twee objekten met de

eigenschap A" wordt $(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y)$; "Er zijn hoogstens drie objekten met de eigenschap A" wordt

$(\forall x_0)(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)((A(x_0) \wedge A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3)) \rightarrow$

$\rightarrow (x_0=x_1 \vee x_0=x_2 \vee x_0=x_3 \vee x_1=x_2 \vee x_1=x_3 \vee x_2=x_3))$.

(Afgekort: $\forall x_0 \ldots x_3 (\bigwedge_{0 \leq i \leq 3} A(x_i) \rightarrow \bigwedge_{0 \leq i < j \leq 3} x_i = x_i))$.

Geef zelf formules voor:

i) Er is precies één objekt met de eigenschap A.

ii) Er is meer dan één objekt met de eigenschap A, maar minder dan vier.

iii) x heeft precies drie delers (zie opgaven IV.1.b).

4. a. Schrijf voor de volgende formules de ontleedboom op en een formering. Geef voor elk de rang aan. Onderlijn voor iedere kwantor zijn bereik.

i) $(\forall x_0)(A(x_0,x_1) \vee (\exists x_0)(\neg B(x_0) \vee A(x_0,x_0))) \vee \neg B(x_2)$.

ii) $(\forall x_1)(A(x_1) \vee (\exists x_2)(\neg A(x_2) \vee \neg((\exists x_1)(A(x_2)) \vee \neg A(x_1))))$.

iii) $(\forall x_0)(\forall x_1)(x_0=x_1 \vee x_0 > x_1 \vee (\exists x_2)(x_2=x_4))$.

iv) $(\forall x_0)((\exists x_1)(\forall x_0)(P(x_0,x_1) \vee P(x_1,x_1)) \vee (\exists x_2)(P(x_0,x_1))$.

v) $(\neg P(x_0,x_3) \vee Q(x_0,x_1)) \vee \neg((\exists x_0)(P(x_0,x_0))$.

b. Geef voor ieder van de bovenstaande formules E de verzameling FV(E) der vrije variabelen aan.

5. De formule A^x_t ontstaat uit A door overal de vrije variabele x door t te vervangen. De substitutie van t voor x heet eerlijk als er in A^x_t niet op nieuwe plaatsen gebonden variabelen staan.

A:= $(\forall x_0)(\forall x_1)(x_0 < x_1 \rightarrow (x_2 < x_1 \vee x_0 < x_2))$.

B:= $(x_0 < x_1 \rightarrow (\exists x_2)(x_0 < x_2 \wedge x_2 < x_1)) \vee (\exists x_0)(x_2 < x_0 \wedge (\forall x_1)(x_1 < x_0 \rightarrow (x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2)))$.

Voer de volgende substituties uit.

$A^{x_2}_{c_3}$, $A^{x_2}_{x_5}$, $A^{x_2}_{x_0}$, $A^{x_0}_{x_2}$, $B^{x_0}_{x_3}$, $B^{x_0}_{x_2}$, $B^{x_2}_{x_0}$, $B^{x_2}_{x_1}$, $B^{x_4}_{x_0}$.

Welke van deze zijn eerlijk ?

6. Geef vijf voorbeelden van correcte uitspraken die door oneerlijk substitutie onwaar worden.

7. a. Zij $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$; en $s_A(i)=i$ en zij $\mathfrak{B} = \{3,4,7\}$; en $s_B(0) = 3$, $s_B(1) = 4$, $s_B(2) = 7$, $s_B(i) = 4$ voor $i > 2$.

   Toon aan dat waar zijn:

   i) $\mathfrak{A}, s_A \models (\forall x_0)(\exists x_1)(x_0 \leq x_1)$.

   ii) $\mathfrak{A}, s_A \models (\exists x_0)(\forall x_1)(x_0 \leq x_1)$.

   iii) $\mathfrak{B}, s_B \models (\exists x_0)(\forall x_1)(x_1 \leq x_0)$.

   iv) $\mathfrak{B}, s_B \models (\forall x_0)(\exists x_1)(x_1 \leq x_0)$.

   b. Toon aan dat waar zijn:

   i) $\mathfrak{A}, s \models (\forall x)A(x,y) \rightarrow (\exists x)A(x,y)$.

   ii) $\mathfrak{A}, s \models (\forall x)(\forall y)A(x,y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)A(x,y)$.

8. Beschouw $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, E, < \rangle$ en $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, E, < \rangle$ waar $x \in E$ als x even is. Geef een formule P zodat $\mathfrak{A} \models P$ en $\mathfrak{B} \not\models P$.

9. a. Vind modellen van de volgende zinnen.

   i) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg(x=y) \wedge \neg(x=z) \wedge \neg(y=z))$.

   ii) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$.

   iii) $(\exists x)(\forall y)(x>y \rightarrow R(y))$.

   b. Vind modellen waarin de volgende zinnen onwaar zijn.

   i) $(\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge A(x) \wedge \neg A(y))$.

   ii) $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$

   iii) $(\forall x)(\forall y)((A(x) \wedge A(y)) \rightarrow x=y)$.

Praktikum Logika 27 februari 1974.

1. Vertaal de volgende Nederlandse zinnen in de predikatenlogika
   i) Er is een éérste natuurlijke getal. (Gebruik de successor funktie S).
   ii) De binaire funkties f en g van $\tilde{f}$ hebben de distributieve eigenschap. (f is distributief t.o.v. g).
   iii) De binaire functie f is niet associatief in de groep.
   iv) $I = \langle G, f, e \rangle$ is commutatief.
   v) $b = \lim_{x \to a} f(x)$ (limiet in $\mathbb{R}$).

2. Interpreteer de volgende termen in de gegeven structuur met behulp van de bijbehorende bedeling.
   i) $\langle x_2 | \mathbb{N}, s_1 \rangle$, $s_1(x_i) = S(S(i))$. (S is de successor functie).
   ii) $\langle (\underline{2}.x_2) + \underline{2} | \mathbb{Q}, s_2 \rangle$, $s_2(x_i) = 347$ voor alle x. ($\underline{2}$ is de constante voor 2).
   iii) $\langle x_1 * x_{347} | \mathbb{M}, s_3 \rangle$, $s_3(x_i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
   iv) $\langle x_5^{-1} | \mathbb{M}, s_3 \rangle$.
   v) $\langle (x_3^{-\frac{1}{2}} + \underline{2})^2 | \mathbb{R}, s_4 \rangle$, $s_4(x_i) = i$.

3. Bewijs: Als twee bedelingen s en s' overeenstemmen op FV(A) dan geldt $\mathfrak{A}, s \models A$ dan en slechts dan als $\mathfrak{A}, s' \models A$.

4. Bewijs: Als $FV(A) = \phi$, dan geldt i) voor alle bedelingen s en s' $\mathfrak{A}, s \models A$ dan en slechts dan als $\mathfrak{A}, s' \models A$, ii) $\mathfrak{A} \models A$ dan en slechts dan als $\mathfrak{A}, s \models S$ voor zekere s.

5. Zij $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}$ structuren. $\mathcal{L}$ heet een deelstructuur van $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$ een uitbreiding van $\mathcal{L}$ dan en slechts dan als
   i) het universum van $\mathcal{L}$ een deelverzameling van het universum van $\mathfrak{A}$ is,
   ii) de relaties van $\mathcal{L}$ precies de relaties van $\mathfrak{A}$ beperkte tot het universum van $\mathcal{L}$ zijn,
   iii) de functies van $\mathcal{L}$ precies de functies van $\mathfrak{A}$ beperkte tot het universum van $\mathcal{L}$ zijn,
   iv) de verzameling constanten van $\mathcal{L}$ de verzameling constanten van $\mathfrak{A}$ is.

z.o.z.

Bewijs dat als $\mathfrak{A} \models \forall x A$ dan $\mathcal{L} \models \forall x A$ waar A bevat geen kwantoren, functie symbolen of constanten.

6. Geef vijf voorbeelden van structuren en deelstructuren alsmede een zin A die waar is in de structuur maar niet in de deelstructuur.

7. Beschouw een predicatenlogica met één binair predicaat P en één unaire functie F.
Schrijf een zin op die zegt dat
   i) F een injectie is
   ii) F een surjectie is
   iii) F een bijectie is
   iv) F een isomorfisme is.

8. Bewijs dat de zin $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow F(x) = F(y) \wedge \exists x \forall y (x \neq F(y))$ geen eindige modellen heeft.

9. Formuleer in de taal van de rekenkunde, met =, +, ., 0, 1
   i) $x|y$
   ii) x is priem
   iii) x is een kwadraat
   iv) het vermoeden van Fermat.

10. Formuleer in de taal van de theorie der ringen, met =, +, ., −, 0, 1
   i) er zijn nuldelers
   ii) de rij is een lichaam
   iii) de ring is commutatief.

Addenda et corrigenda

Praktikum Logika I — 23 januari 1974

3. iii) $\neg A \to (A \wedge B)$
5. iii) $(((A \wedge (B \vee \neg A)) \vee \neg B) \wedge B) \to A$.
8. Stel dat $r(A) = r(B) = r(C) = 1$.
9. Voeg de volgende regel aan de waarheidstafel toe:

A	B	C	$
1	0	1	1

12. Bewijs dat $r(A)$ de lengte van de langste tak in de ontleedboom van A is.
13. $f(A \vee B) = F(f(A), f(B))$.
$f(\neg A) = G(f(A))$.

Praktikum Logika II — 30 januari 1974.

3. i) $A \to C,\ B \to C \vdash A \vee B \to C$.
3. iii) $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$.

Praktikum Logika III — 6 februari 1974

4. ii) Laatste regel. Vervang $\nvdash A \to B$ door $\nvdash A \to C$.
5. "stel" wordt "stellen".

Praktikum Logika IV — 13 februari 1974.

1.a. ii) "de" wordt "het".
1.c. iii) $(\exists x)(\forall y)((x \in S) \wedge ((y \in S) \to (y \leqslant x)))$.
2. i) $(\exists x_0)(R(x_0, x_1) \to (x_0 = x_1))$.
3. blz. 2, regel 3. Laat de pijl weg.
3. blz. 2, regel 5. $\bigwedge\limits_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} x_i = x_i))$ wordt $\bigvee\limits_{0\leqslant i<j\leqslant 3} x_i = x_j))$.
7.a. $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ en $\mathfrak{B} = \langle \{3,4,7\}, \leqslant \rangle$.
7.a. $s_A(i)$ wordt $s_A(x_i)$ en $s_B(i)$ wordt $s_B(x_i)$.
7.b. Voeg toe: "waar $\mathfrak{A}$ een willekeurige structuur is".

Praktikum Logika V — 20 februari 1974.

1. ϕ wordt A, "modellen" wordt "structuren", en A wordt R overal,

z.o.z.

1. iv) $A := \exists x(f(f(f(x))) = x \wedge f(x) \neq x \wedge f(f(x)) \neq x \wedge$
$f(f(x)) \neq f(x) \wedge \forall y(y = x \vee y = f(x) \vee y = f(f(x))))$.

2. ϕ wordt A en A wordt R overal.

2. i) Voeg (2x) voor "getallen" toe "gehele".

2. iv) $\{|\}$ wordt $\{1\}$.

3. iii) Laat de hypothese weg.

4. "prenex" wordt "prenexe".

6. De tweede $A(y,z)$ wordt $A(y,x)$.

7.a. "prenex" wordt "prenexe".

7.b. "prenix" wordt "prenexe".

Praktikum Logika VI 27 februari 1974.

1. ii) Laat "van $\tilde{f}$" weg.

1. iii) De binaire functie f is niet associatief.

1. iv) De binaire functie f is commutatief.

2. iii) $\langle x_1 * x_{347} | \mathbb{M}, s_3 \rangle$, $s_3(x_i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ en $\mathbb{M}$ is de groep der 2×2 matrices met vermenigvuldiging $*$.

2. v) $\langle x_3 \,.\, x_5 / \underline{2} | \mathbb{R}, s_4 \rangle$, $s_4(x_i) = i$.

10. ii) "rij" wordt "ring".

5. De beperking betreffende functiesymbolen en constanten kan vervallen.

TENTAMEN LOGICA Verplichte stof

18 mei 1974. 9.30-12.30.

1. Bij de volgende onderdelen worden proposities A, B en C gevraagd zodat

   (a) $\models A \wedge B$

   (b) $\models (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg A)$

   (c) $\models \neg A \to A$

   (d) $\models [(A \wedge \neg B) \vee C] \to [(\neg A \vee C) \wedge \neg B]$

2. (a) Geef structuren $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ zodat
   $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y \forall z (P(x) \to Q(y,z))$ en
   $\mathfrak{B} \not\models \forall x \exists y \forall z (P(x) \to Q(y,z))$

   (b) Geef een zin zodat $\mathfrak{A} \models A$ en $\mathfrak{B} \not\models A$ waar
   $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}, + \rangle$ en $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}, . \rangle$

   (c) Beschouw $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$, $Y = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$,
   $\mathfrak{A} = \langle X \cup Y, < \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle X \cup Y \cup \{0\}, < \rangle$ waarin
   $<$ de natuurlijke ordering op $\mathbb{Q}$ is.
   Geef een zin A zodat $\mathfrak{A} \not\models A$ en $\mathfrak{B} \models A$.

3. $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ zijn structuren met
   $\mathfrak{A} = \langle A, R, F, c \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, R^*, F^*, c \rangle$ zodat

   $A \subseteq B$

   $R \subsetneq A^2, R^* \subseteq B^2$ en $R = R^* \cap A^2$

   $F: A^2 \to A, F^*: B^2 \to B$ en $F = F^* \upharpoonright A^2$

   $c \in A$

   d.w.z. $\mathfrak{A}$ is een deelstructuur van $\mathfrak{B}$.
   De bijbehorende taal bevat

   twee predicaatsymbolen : $\hat{R}$ en $=$
   één functiesymbool : $\hat{f}$
   één constante : $\hat{c}$

symbolen		$\hat{R}$	$\hat{f}$	$=$	$\hat{c}$
interpretatie in	$\mathfrak{A}$	R	F	=	c
interpretatie in	$\mathfrak{B}$	R^*	F^*	$=^*$	c

Laat s een bedeling op $\mathfrak{A}$ zijn.
In de volgende vragen mogen steeds alle voorgaande onderdelen gebruikt worden.

Bewijs (a) $< t;\mathfrak{A},s > = < t;\mathcal{L},s >$

(b) $\mathfrak{A},s \models \hat{R}(t_1, t_2) \Leftrightarrow \mathcal{L},s \models \hat{R}(t_1, t_2)$

In de volgende onderdelen bevatten D en E geen kwantoren

(c) $\mathfrak{A},s \models D \vee E \Leftrightarrow \mathcal{L},s \models D \vee E$

(d) $\mathfrak{A},s \models \neg D \Leftrightarrow \mathcal{L},s \models \neg D$

(e) $\mathfrak{A},s \models (\exists x_0)D(x_0) \Rightarrow \mathcal{L},s \models (\exists x_0)D(x_0)$

(f) $\mathfrak{A} \models (\exists x_0)D(x_0) \Rightarrow \mathcal{L} \models (\exists x_0)D(x_0)$
als x_0 de enige vrije variabele in D is.

(g) Kan de beperking in (f) worden weggelaten ?

4. In elk onderdeel van deze opgave moet u een niet lege partieel geordende verzameling $< A,< >$ definiëren met de aangegeven eigenschap(pen).

i) $\underline{\underline{A}}$ is oneindig en heeft alleen eindige ketens.

ii) $\overline{A} = \aleph_0$ en heeft $2^{\aleph_0}$ ketens.

iii) A heeft geen grootste element, maar wel precies één maximaal element.

iv) A is lineair geordend en heeft een deelverzameling B die wel een bovengrens heeft, maar B heeft geen supremum.

v) $B \subseteq A \Rightarrow B$ heeft een supremum $b \in B$, B willekeurig.

5. Zij V een vectorruimte over het lichaam K.
Een verzameling $B \subseteq V$ heet <u>lineair onafhankelijk</u> als voor ieder eindig aantal $a_1, \ldots, a_n \in B$ geldt

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = 0,\ k_i \in K \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0.$$

$B \subseteq V$ is een <u>basis</u> voor V als geldt:

1. B is lineair onafhankelijk
2. Iedere $x \in V$ is te schrijven als $x = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i$ met $b_1, \ldots, b_n \in B$.

z.o.z.

Bewijs dat iedere vectorruimte een basis heeft.
[Hint: Beschouw $A = \{B \subseteq V \mid B$ is onafhankelijk$\}$.
Laat A partieel geordend zijn door $\subseteq$. Pas Zorn toe.]

6. i) Bewijs $(A^B)^C =_1 A^{B\times C}$ en geef de bijectie in λ-notatie.
   ii) Zij $A = \{\langle f,a\rangle \mid f:\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{Q}\}$. Bereken $\bar{\bar{A}}$.
   iii) Idem voor $A = \{\langle f,F\rangle \mid f:\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
   iv) Bewijs $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \mathrm{range}(f) \subseteq \mathbb{Q}\} =_1 \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

HET SEMANTISCH TABLEAU

De waarheidstafels leveren een methode om te beslissen of een propositie een tautologie is. Helaas is de methode nogal oneconomisch.

We zullen een methode aangeven om systematisch te onderzoeken of er een waardering w is zodat

$w(A_1) = \ldots = w(A_n) = 1$ en $w(B) = 0$ (dwz.

$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ is geen tautologie).

Voorbeeld.

1	0	
	$A \rightarrow (A \vee B)$	(1)
A	$A \vee B$	(2)
═	A,B ═	(3)

voor $w(A \rightarrow (A \vee B)) = 0$ is vereist

$w(A) = 1$ en $w(A \vee B) = 0$ (regel (2))

voor $w(A \vee B) = 0$ is vereist $w(A) = w(B) = 0$ (regel (3)).

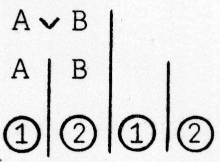
Nu blijkt dat zowel $w(A) = 1$ als $w(A) = 0$ moet gelden. Dit is onmogelijk. Dus $A \rightarrow (A \vee B)$ is een tautologie.

Het bovenstaande tableau is een systematische poging om $A \rightarrow (A \vee B)$ onwaar te maken.

Omdat A links en rechts voorkomt is de poging mislukt, we zeggen dat het tableau <u>gesloten</u> is (aangegeven door ═).

Hieronder geven we alle mogelijke reducties van samengestelde proposities.

$\vee$ links



Toelichting. Als $w(A \vee B) = 1$, dan zijn er twee mogelijkheden:

$w(A) = 1$ en $w(B) = 1$.

We moeten dus nu 2 tableaus verder uitwerken.

$A \vee B$		en	$A \vee B$	
A			B	

Gemakshalve brengen we beide tableaus in één figuur onder (gemerkt ① en ②). We zeggen dat het tableau <u>gesplitst</u> is.

$\vee$ rechts

	$A \vee B$
	A, B

$\neg$ links

$\neg A$	
	A

$\neg$ rechts

	$\neg A$
A	

$\wedge$ links

$A \wedge B$	
A, B	

$\wedge$ rechts

		$A \wedge B$	
		A	B

$\rightarrow$ links

	$A \rightarrow B$		
	B	A	

$\rightarrow$ rechts

	$A \rightarrow B$
A	B

We zeggen dat een propositie in een tableau de <u>correcte waarde</u> heeft als hij de waarde heeft die door zijn kolom wordt aangegeven (1 links, 0 rechts).

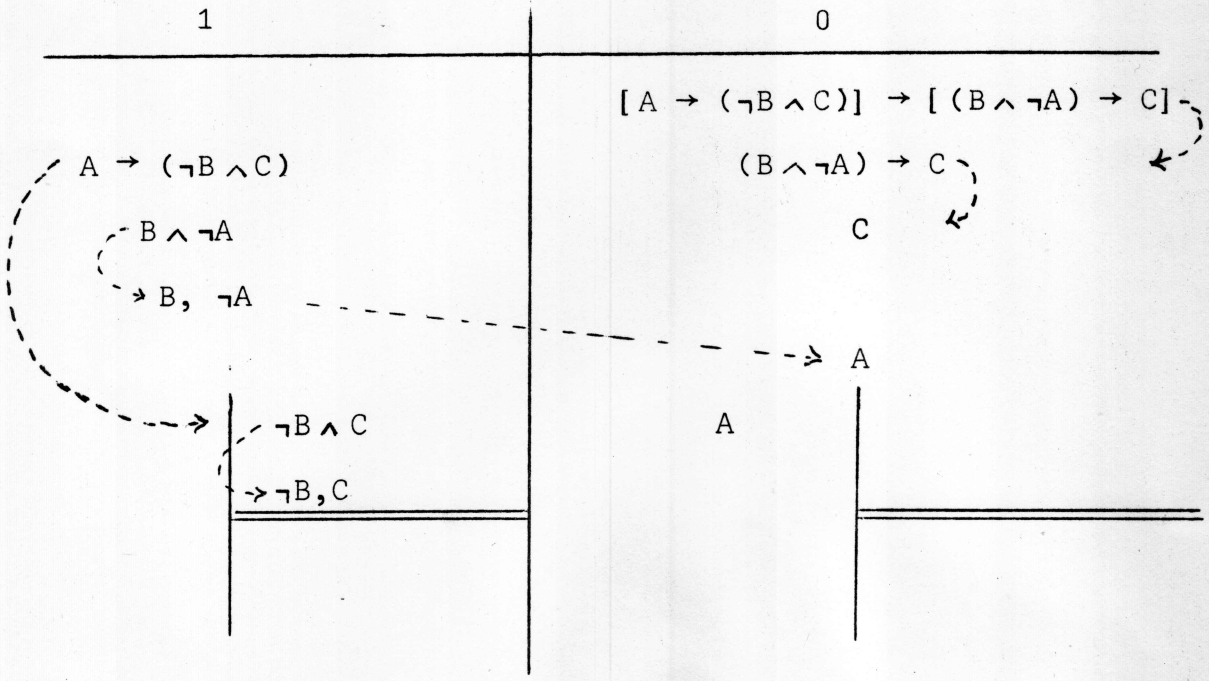
<u>Opgave ST1</u>

(a) Beschouw een reductie die het tableau niet splitst. Bewijs dat de gereduceerde propositie de correcte waarde heeft, dan en slechts dan als de propositie(s) op de volgende regel de correcte waarde heeft (hebben).

(b) Beschouw een reductie die het tableau splitst. Bewijs dat de gereduceerde propositie de correcte waarde heeft dan en slechts dan als in minstens één van de resulterende tableaus de propositie op de volgende regel de correcte waarde heeft.

<u>Aanwijzing</u>: ga alle gevallen na.

VOORBEELD:



Merk op dat: 1) Een gesloten tableau niet verder gereduceerd hoeft te worden (het is immers onmogelijk om correcte waarden te geven).

2) Na verloop van tijd alle proposities gereduceerd zijn.

3) Uit het niet gesloten tableau lezen we een waardering

af die de beginformule de waarde 0 geeft -
kies w(B) = 1, W(A) = w(C) = 0.
Truc: geef de atomen onder 0(1) de waarde 0(1).

Opgave ST2

Bewijs dat een propositie A een tautologie is, dan en slechts dan als alle tableaus die door reductie verkregen worden uit de beginstand

1	0
	A

gesloten zijn.

Opgave ST3

Ga m.b.v. semantische tableaus na of de volgende proposities tautologieën zijn. Zo, nee geef dan een waardering w die de propositie onwaar maakt.

(a) $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$

(b) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(c) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

(d) $(\neg A \vee B) \wedge (C \rightarrow (B \rightarrow A))$

(e) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$

(f) $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

(g) $\neg(A \rightarrow \neg A)$

(h) $(A \vee (A \wedge B)) \rightarrow B$

(i) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(j) $(A \rightarrow (A \wedge \neg A)) \rightarrow A$

Opgave ST4

Bewijs dat $A_1,\ldots,A_n \vdash B$ dan en slechts dan als alle tableaus die door reduktie verkregen worden uit de beginstand

1	0
$A_1,\ldots\ldots,A_n$	B

gesloten zijn. (gebruik de volledigheidsst.).

Opgave ST5

Bewijs

(a) $A, B \vdash A \wedge B$

(b) $A, \neg A \vdash B$

(c) $\neg A, A \vee B, B \rightarrow C \vdash C$